

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2022–2023**

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κ.λπ..

**Κεφάλαιο 1ο**

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

**§1.1. Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

Από το Γυμνάσιο είναι γνωστή η έννοια των γραμμικών συστημάτων  $2 \times 2$ , η γραφική επίλυσή τους και η αλγεβρική επίλυση με τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Εδώ προτείνεται να γίνει μια επανάληψη εστιάζοντας στη σύνδεση της αλγεβρικής λύσης του συστήματος με το γεωμετρικό της νόημα και στην επίλυση προβλημάτων. Η γεωμετρική έκφραση του συστήματος και της λύσης του μπορεί να συνδεθεί με την ευθεία ως συνάρτηση και τον συντελεστή διεύθυνσής της. Για παράδειγμα, οι ασκήσεις 5 και 6 της Α' Ομάδας μπορούν να τροποποιηθούν ώστε το ζητούμενο να είναι α) ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών που περιγράφουν αυτές οι εξισώσεις, β) η σχετική θέση αυτών των ευθειών, και γ) το πλήθος λύσεων του συστήματος.

**Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)**

**§2.1 και 2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)**

Αρχικά, οι μαθητές/-ήτριες χρησιμοποιούν πίνακες τιμών και λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = ax^2$  και χρησιμοποιούν τις μετατοπίσεις για να μελετήσουν την  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ . Σε αυτή τη μελέτη εξετάζουν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες αυτών των συναρτήσεων. Διατυπώνονται οι γενικοί ορισμοί των παραπάνω εννοιών και εξετάζονται αυτές οι έννοιες και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών παραστάσεών τους. Η έμφαση πρέπει να δοθεί στη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών της μονοτονίας, των ακροτάτων και της άρτιας – περιττής και στη σύνδεση της γεωμετρικής ερμηνείας με την αλγεβρική έκφραση.

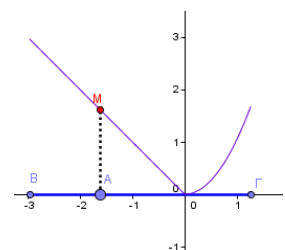
Ενδεικτικά, ασκήσεις που προτείνονται επειδή υποστηρίζουν τα παραπάνω είναι:

- Από την §2.1 οι 1, 2, 4, 6, 7, 8.
- Από την §2.2 οι 1, 2, 5.

Σημειώνεται ότι η διδασκαλία των ιδιοτήτων των συναρτήσεων (μονοτονία, ακρότατα, συμμετρίες) σε αυτή την τάξη εστιάζει στην κατανόηση των εννοιών σε άμεση σύνδεση με την εικόνα των γραφημάτων και όχι στην ευελιξία των μαθητών στις αλγεβρικές μεθόδους μελέτης των ιδιοτήτων.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα « Συμμεταβολή σημείων - Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται



για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή σημείων και διερεύνηση των ιδιοτήτων της συμμεταβολής των δύο σημείων, της μονοτονίας και των ακροτάτων.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5226>

### Κεφάλαιο 3ο

(Προτείνεται να διατεθούν 22 διδακτικές ώρες)

#### §3.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες στο Γυμνάσιο έχουν συναντήσει και ασχοληθεί με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και αμβλείας γωνίας. Το καινούργιο εδώ είναι η εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών. Επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο στηρίζονται όλες οι έννοιες και οι ιδιότητες που μελετώνται στη συνέχεια, έμφαση πρέπει να δοθεί στην κατανόησή του που θα επιτρέψει τη συνεχή χρήση του αντί για την απομνημόνευση τύπων (πχ. για την αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο). Επίσης, να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και στην «κατάληξη» της τελικής πλευράς μιας γωνίας πάνω σε αυτόν.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία, με  $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$  που ικανοποιεί τις σχέσεις:  $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$ . Να σχεδιάσετε τη γωνία  $\omega$  πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

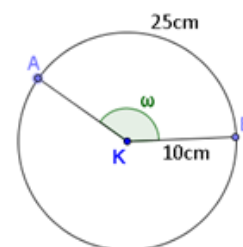
β) Να βρείτε όλες τις γωνίες  $\varphi$  με  $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ , που ικανοποιούν τη σχέση  $\eta\mu\varphi = -\frac{1}{2}$  και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Δίνεται ο κύκλος του σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο AB με μήκος 25 cm και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία  $\omega$ .

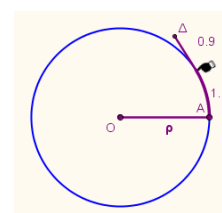
α) Να βρείτε το μέτρο της  $\omega$  σε rad.

β) Να δικαιολογήσετε ότι το συνημίτονο της γωνίας  $\omega$  είναι αρνητικό.



##### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Τι είναι το ακτίνιο;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την κατανόηση της έννοιας του ακτινίου και τη



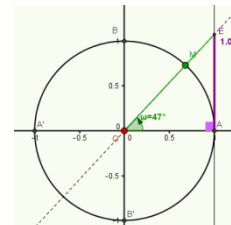
σύνδεση μεταξύ της μέτρησης γωνιών σε μοίρες και ακτινίων στον τριγωνομετρικό κύκλο.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5272>

Ενδεικτική δραστηριότητα 4:

Με το μικροπείραμα «Ο τριγωνομετρικός κύκλος» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές εισάγονται στον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου και των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5140>



**§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες**

Ο στόχος της παραγράφου είναι η κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών και για αυτό οι μαθήτριες/-ητές θα πρέπει να εμπλακούν με απλές ασκήσεις υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών όταν είναι γνωστός ο ένας και με απλές αποδείξεις σχέσεων. Για τον σκοπό αυτό προτείνεται να γίνει επιλογή από τις ασκήσεις 1-6 και από τις 10 – 11 της Α΄ Ομάδας. Ασκήσεις απόδειξης σχέσεων που είναι περισσότερο απαιτητικές από τις προτεινόμενες δεν συμβάλλουν στην επίτευξη των στόχων του μαθήματος.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Υπάρχει γωνία  $\theta$  με  $\eta\mu\theta = \frac{1}{4}$  και  $\sigma\upsilon\upsilon\eta\theta = \frac{3}{4}$ ;

β) Υπάρχει γωνία  $\theta$  με  $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$  και  $\sigma\upsilon\upsilon\eta\theta = -\frac{4}{5}$ ;

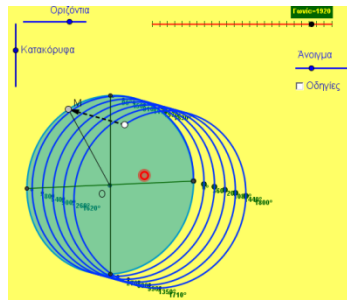
Αν όχι, αιτιολογήστε. Αν ναι, να σχεδιάσετε μια τέτοια γωνία πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Πόσες τέτοιες γωνίες μεταξύ  $0^\circ$  και  $360^\circ$  υπάρχουν;

**§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες**

Η ανάδειξη του τριγωνομετρικού κύκλου ως βασικό εργαλείο αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο μπορεί να αντικαταστήσει την απομνημόνευση τύπων και την αναπαραγωγή κανόνων χωρίς νόημα. Αυτό μπορεί να γίνει αν ενθαρρυνθούν οι μαθητές/-ήτριες να χρησιμοποιούν τις συμμετρίες σε νοητό τριγωνομετρικό κύκλο. Προτείνεται να μη δοθούν προς λύση οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας. Οι ερωτήσεις κατανόησης I και II μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συζητηθούν και να διευκρινιστούν πτυχές των προηγούμενων ενοτήτων της τριγωνομετρίας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Με το μικροπείραμα «Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που ανάγονται στο 2ο τεταρτημόριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες βρίσκουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που ανάγονται στο δεύτερο τεταρτημόριο.



Με τη βοήθεια του λογισμικού μέσω πολλαπλών δυναμικά αλληλοσυνδεόμενων γεωμετρικών αναπαραστάσεων, οι μαθητές/-ήτριες βρίσκουν με τη βοήθεια δρομέα μια συγκεκριμένη γωνία μεγαλύτερη των  $360^\circ$  και βλέπουν την γεωμετρική της αναπαράσταση πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Στη συνέχεια, μπορούν να δουν το τόξο της γωνίας αυτής στον χώρο, βρίσκουν την προβολή του στον πρώτο κύκλο και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής, αφού την αναγάγουν σε γωνία του πρώτου τεταρτημορίου. Τέλος, εφαρμόζουν τη στρατηγική αυτή και σε άλλες γωνίες.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5275>

### §3.4 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Η έννοια της περιοδικότητας, που συνδέεται άμεσα με φαινόμενα της καθημερινής ζωής, είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες που θα διδαχθούν οι μαθητήτριες/-ητές στη Β' Λυκείου. Θα πρέπει λοιπόν να δοθεί έμφαση σε αυτή την ιδιότητα μέσα από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις σε συνδυασμό με προβλήματα. Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων προτείνεται να στηριχτεί στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Πρέπει να επισημανθεί ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εκφράζει τόξο μετρημένο σε ακτίνια και όχι σε μοίρες. Επίσης, ότι στον τριγωνομετρικό κύκλο το μέτρο του τόξου σε ακτίνια ταυτίζεται αριθμητικά με το μήκος του και ότι έτσι, «τυλίγουμε» την ευθεία των πραγματικών αριθμών στον τριγωνομετρικό κύκλο, με αποτέλεσμα κάθε πραγματικός αριθμός να αντιστοιχεί σε ένα σημείο του κύκλου και κάθε σημείο του κύκλου να αντιστοιχεί σε άπειρους πραγματικούς αριθμούς.

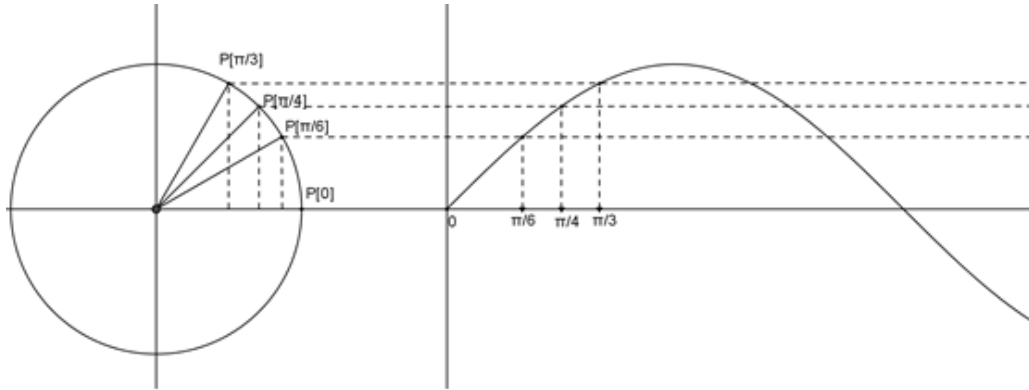
Αφού συζητηθούν τα παραδείγματα του σχολικού βιβλίου, προτείνεται να τονιστούν τα συμπεράσματα που περιέχονται στο Σχόλιο της σελίδας 81.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μία ρόδα ακτίνας 1 περιστρέφεται με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού έτσι ώστε, κάθε σημείο της περιφέρειάς της, να διαγράφει σε ένα δευτερόλεπτο τόξο ενός ακτινίου. Τοποθετούμε τη ρόδα σε ένα σύστημα αξόνων με αρχή στο κέντρο της  $O$  και θεωρούμε ένα σημείο της  $P$ , το οποίο τη χρονική στιγμή  $0$  βρίσκεται στο σημείο  $(1,0)$ .

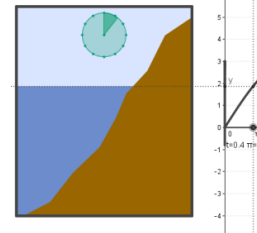
α) Να εξηγήσετε γιατί, το ύψος του σημείου  $P$  σε σχέση με τον άξονα  $x'x$  κάθε χρονική στιγμή  $t$  (σε sec),  $t \geq 0$  δίνεται από τη συνάρτηση  $f(t) = \eta \mu t$ ,  $t \geq 0$

- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(t)$  στο διάστημα  $[0, 4\pi]$ .
- γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές  $t$  με  $0 \leq t \leq 4\pi$  κατά τις οποίες το σημείο  $P$  βρίσκεται στο μεγαλύτερο και στο μικρότερο δυνατό ύψος.
- δ) Να προσδιορίσετε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ  $0$  και  $4\pi$  sec κατά τα οποία το ύψος του σημείου  $P$  είναι μεγαλύτερο του  $0,5$ .
- ε) Θεωρούμε τώρα το σημείο  $K$  της ρόδας, το οποίο τη χρονική στιγμή  $0$  βρίσκεται στη θέση  $(0,1)$ . Να δείξετε ότι το ύψος του σημείου  $K$  κάθε χρονική στιγμή  $t$  sec δίνεται από τη συνάρτηση  $g(t) = \sin vt, t \geq 0$ .



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

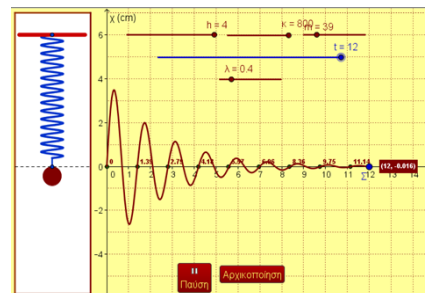
Με το μικροπείραμα «Περιοδικά φαινόμενα: Η παλίρροια» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία (άσκηση 2, Β' ομάδας), οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης μελετούν το φαινόμενο της παλίρροιας και αναζητούν απαντήσεις, με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5165>

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Με το μικροπείραμα «Περιοδικές συναρτήσεις - Το ελατήριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των περιοδικών συναρτήσεων. Επίσης, πειραματίζονται με ένα ελατήριο και αναζητούν απαντήσεις με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5208>

**§3.5 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις είναι ένα σημαντικό αλγεβρικό εργαλείο και είναι το πρώτο είδος μη πολυωνυμικών εξισώσεων που συναντούν οι μαθητές/-ήτριες. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην ερμηνεία των τύπων λύσεων τόσο μέσω του τριγωνομετρικού κύκλου, όσο και μέσω των γραφικών παραστάσεων των αντίστοιχων συναρτήσεων. Η σύνδεση των εξισώσεων με τον κύκλο και τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων είναι σημαντική ακόμα και όταν οι μαθήτριες/-ητές έχουν αναπτύξει αλγοριθμικές δεξιότητες αλγεβρικής επίλυσης των τριγωνομετρικών εξισώσεων. Αυτό μπορεί να γίνεται με παραδείγματα όπως η ενδεικτική δραστηριότητα 2 παρακάτω, αλλά και με παραδείγματα που ζητείται η άντληση συμπερασμάτων από τη γραφική παράσταση περιοδικής συνάρτησης (π.χ. εμπλουτίζοντας της άσκηση 3 της Β' Ομάδας της §3.4 με το ερώτημα “πότε περίπου η απόσταση του παιχνιδιού από το έδαφος γίνεται 1,25m;”)

Προτείνεται να μη γίνουν η άσκηση 11(ii) της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 1, 2, 4, 5 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία  $\omega$  (σε rad), με  $0 \leq \omega < 2\pi$  που ικανοποιεί τις σχέσεις:  $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$ .

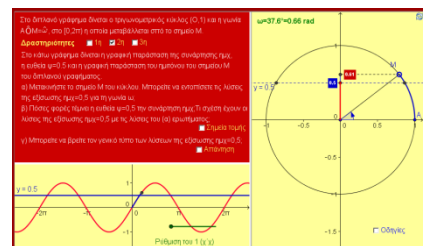
Ο. Να σχεδιάσετε τη γωνία  $\omega$  πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες  $\phi$  με  $0 \leq \phi < 2\pi$ , που ικανοποιούν τη σχέση  $\eta\mu\phi = \frac{1}{2}$  και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

γ) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης  $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Η εξίσωση  $\eta\mu x = \alpha$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/τριες βρίσκουν τις λύσεις μιας συγκεκριμένης εξίσωσης στον τριγωνομετρικό κύκλο και μέσω πολλαπλών δυναμικά αλληλοσυνδεόμενων γεωμετρικών και γραφικών αναπαραστάσεων, γενικεύουν τις λύσεις αυτές σ' όλο το  $\mathbb{R}$ . Στη συνέχεια δημιουργούν τις δικές τους εξισώσεις και τις λύνουν επαληθεύοντας ταυτόχρονα τις λύσεις τους γραφικά.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5141>

**Κεφάλαιο 4ο**

**(Προτείνεται να διατεθούν 21 διδακτικές ώρες)**

Όλη η διδασκαλία των πολυωνύμων θα πρέπει να εμπλουτιστεί με την – αν όχι να εστιαστεί στη – συναρτησιακή προσέγγιση των πολυωνύμων. Αυτή η προσέγγιση α) θα παρέχει στις μαθήτριες και στους μαθητές τη δυνατότητα πρόσβασης σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις (όπως είναι η γραφική

παράσταση συνάρτησης) που μπορούν να βοηθήσουν στην απόδοση νοήματος και την κατανόηση και β) θα μειώσει τον ρόλο αφηρημένων αλγεβρικών προσεγγίσεων των πολυωνύμων που δεν συνδέονται με την κατανόηση ούτε με την περαιτέρω διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών.

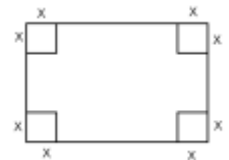
#### §4.1 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Μετά τη διαπραγμάτευση των βασικών εννοιών των πολυωνύμων προτείνεται να παρουσιαστούν (είτε με λογισμικό, είτε με έντυπη μορφή) οι γραφικές παραστάσεις μερικών πολυωνυμικών συναρτήσεων όπως οι  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = -x^3$ ,  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ . Στόχος είναι η παρατήρηση και ο σχολιασμός των ιδιοτήτων τους, των σημείων τομής με τους άξονες, των τμημάτων που βρίσκονται πάνω ή κάτω από τον άξονα  $x'$ , κ.λπ..

Ως προς τις ασκήσεις, προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι 1 και 2, 5 και 6 της Α' Ομάδας και 2, 3 και 5 της Β' Ομάδας.

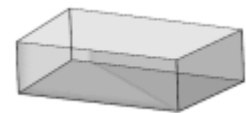
##### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Από ένα χαρτόνι διαστάσεων  $20 \times 30$  εκατοστών κόβουμε τετράγωνα πλευράς  $x$  (όπως φαίνεται στο σχήμα) με σκοπό να κατασκευάσουμε ένα κουτί ανοικτό από πάνω.



α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να εκφράζει τον όγκο του κουτιού. Τι τιμές μπορεί να πάρει το  $x$ ;

β) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι όσο αυξάνεται το  $x$ , μειώνεται ο όγκος. Να φτιάξετε ένα πίνακα τιμών για να διαπιστώσετε αν ο Γιάννης έχει δίκιο.

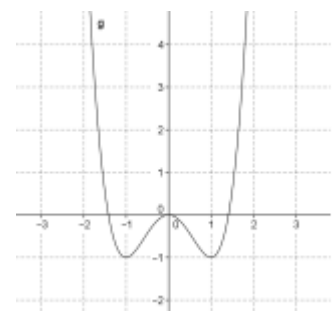
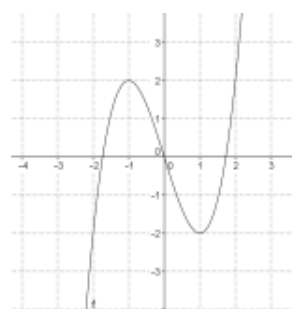


γ) Να βρείτε (με προσέγγιση) πόσο πρέπει να είναι το  $x$  ώστε το κουτί να έχει το μέγιστο όγκο.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^3 - 3x$  και  $g(x) = x^4 - 2x^2$

χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (εναλλακτικά μπορεί τα σχήματα να δίνονται στους/στις μαθητές/-ήτριες όταν δεν υπάρχει δυνατότητα σχεδιασμού με ψηφιακά εργαλεία). Παρατηρώντας το σχήμα,



α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των  $f$  και  $g$ .

β) Είναι κάποια συνάρτηση άρτια ή περιττή;

γ) Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς  $g(-2)$ ,  $g(-0,5)$ ,  $g(0)$ ,  $g(1)$ ,  $g(1,5)$ .

#### §4.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη χρήση των θεωρημάτων της υποπαραγράφου "Διαίρεση πολυωνύμου με  $x-p$ " και πιο συγκεκριμένα, στη μεταξύ τους σχέση και στη συνέπεια που έχουν για τη παραγοντοποίηση πολυωνύμου. Για το σχήμα Horner καλό είναι να εξηγηθεί η σχέση του με τους συντελεστές που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία της διαίρεσης (όπως στο εισαγωγικό παράδειγμα του σχολικού βιβλίου ή με άλλο αριθμητικό παράδειγμα).

Προτείνεται να μη συζητηθούν οι ασκήσεις 1, 2 και 5 της Β' Ομάδας.

#### §4.3 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

Στην ενότητα αυτή εισάγονται νέα εργαλεία για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων μέσω της οποίας επιλύονται στη συνέχεια πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 2. Αν και οι ακέραιες ρίζες ενός τυχαίου πολυωνύμου δεν εμφανίζονται συχνά, παρόλα αυτά το θεώρημα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο. Ωστόσο, για τη λύση πολυωνυμικής εξίσωσης, έμφαση πρέπει να δοθεί στην προτεραιότητα της παραγοντοποίησης του αντίστοιχου πολυωνύμου.

Ο προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση είναι ένα χρήσιμο αριθμητικό εργαλείο που μπορεί να συνδεθεί με τον τρόπο που θα μπορούσε να προσδιορίσει κανείς μη ακέραια ρίζα αν είχε στη διάθεσή του κάποια υπολογιστική μηχανή. Κυρίως όμως, αυτή η μέθοδος, επειδή στηρίζεται στη γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Bolzano, υποστηρίζει την συναρτησιακή προσέγγιση και την οπτικοποίηση των σχετιζόμενων εννοιών.

Στο πλαίσιο της επίλυσης ανισώσεων, προτείνεται να συζητηθούν και πάλι οι ανισώσεις δευτέρου βαθμού και να συνδεθούν (όπως και όλες οι πολυωνυμικές ανισώσεις) με τη γεωμετρική ερμηνεία τους.

Προτείνεται να γίνουν οι ασκήσεις 1, 2, 4, 5, 6 και 8 της Α' Ομάδας και προβλήματα της Β' Ομάδας, τα οποία οδηγούν στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μια βιομηχανία έχει υπολογίσει ότι για την ημερήσια παραγωγή  $x$  μονάδων από ένα προϊόν έχει κόστος  $K(x) = -2x^2 + 120x + 100$  χιλιάδες ευρώ, ενώ η πώληση αυτών των  $x$  μονάδων της αποφέρει έσοδα  $E(x) = x^3 - x^2 + 20x$  χιλιάδες ευρώ. Η βιομηχανία μπορεί να παράγει μέχρι 20 μονάδες αυτού του προϊόντος καθημερινά.

α) Ποια παραγωγή δίνει έσοδα 20.000 ευρώ;

β) Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία για να έχει κέρδος;

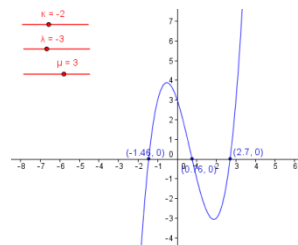
##### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:



Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $x^3 + 2x - 2 = 0$  έχει ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Να προσδιορίσετε αυτή τη ρίζα με προσέγγιση εκατοστού, χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης. Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να διαπιστώσετε αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 1 και 2;

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

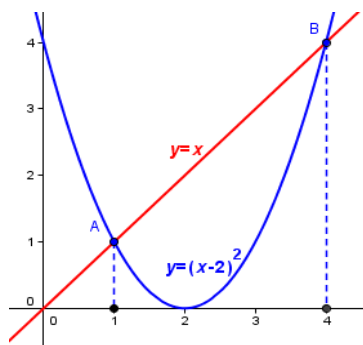
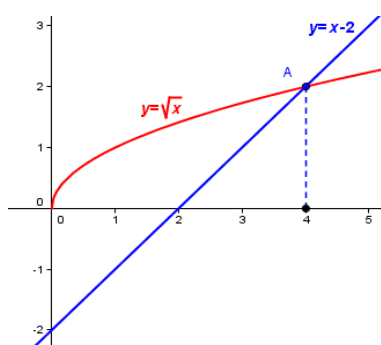
Με το μικροπείραμα «Πολυωνυμική εξίσωση 3ου βαθμού» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες διερευνούν τη σχέση των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης 3ου βαθμού, με τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της αντίστοιχης πολυωνυμικής συνάρτησης τέμνει τον οριζόντιο άξονα.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5229>

**§4.4 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Στην ενότητα αυτή επιλύονται εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές, όπως άρρητες και κλασματικές εξισώσεις και ανισώσεις. Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η ύψωση των μελών μιας εξίσωσης στο τετράγωνο δεν οδηγεί πάντα σε ισοδύναμη εξίσωση. Αυτό μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια των παρακάτω γραφικών παραστάσεων που αναφέρονται στο παράδειγμα 2.



Προτείνεται η αποφυγή πολύπλοκων ασκήσεων (όπως πχ. οι ασκήσεις 3viii, 6 της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 2, 3, 4 και 5 της Β' Ομάδας) οι οποίες ξεφεύγουν από τους στόχους διδασκαλίας του μαθήματος..

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x+3} = x+1$  ( $E_1$ ).

β) Να λύσετε την εξίσωση  $x+3 = (x+1)^2$  ( $E_2$ )

γ) Να εξηγήσετε γιατί η  $E_1$  και η  $E_2$  δεν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, αν και η  $E_2$  προκύπτει από την  $E_1$  αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της στο τετράγωνο.

δ) Να λύσετε γραφικά τις εξισώσεις του α) και του β) ερωτήματος.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$  και την ευθεία  $y = \frac{1}{2}x$

χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα,

α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

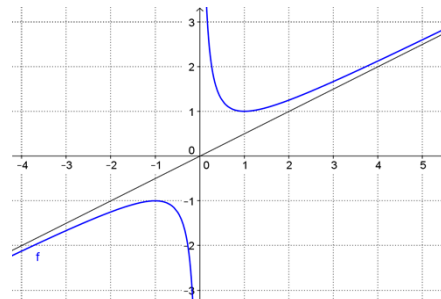
β) να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

γ) να βρείτε από τη γραφική παράσταση (κατά προσέγγιση) τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 2$ . Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

δ) να εξετάσετε για ποιες τιμές του  $c$  η εξίσωση  $f(x) = c$  έχει λύσεις και πόσες. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) να εξετάσετε για ποιες τιμές του  $\alpha$  η ευθεία  $y = \alpha x$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$ .

στ) να βρείτε γραφικά και αλγεβρικά τις λύσεις της ανίσωσης  $\frac{x^2 + 1}{2x} > \frac{1}{2}$



## Κεφάλαιο 5ο

(Προτείνεται να διατεθούν 18 διδακτικές ώρες)

### §5.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Η έννοια της εκθετικής μεταβολής που συνδέεται με σημαντικά φαινόμενα της πραγματικότητας, μπορεί να αποτελέσει την εισαγωγή στην εκθετική συνάρτηση. Αν και συχνά στα πραγματικά φαινόμενα που μελετάμε, οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι διακριτές (συχνά είναι φυσικοί αριθμοί), τέτοια φαινόμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μετάβαση στην εκθετική συνάρτηση, δηλαδή σε πεδίο ορισμού τους πραγματικούς. Η έμφαση στη διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης πρέπει να είναι στα προβλήματα και στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στις ασκήσεις 1-5 της Α' Ομάδας και στα προβλήματα 6, 7 και 8 της Β' Ομάδας.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Τα βακτήρια είναι πολύ μικροί, μονοκύτταροι οργανισμοί που είναι μακράν οι πιο πολυπληθείς οργανισμοί στη Γη, οι οποίοι αναπαράγονται μέσω μιας διεργασίας που ονομάζεται διχοτόμηση: ένα κύτταρο χωρίζεται στη μέση, σχηματίζοντας δύο "θυγατρικά κύτταρα". Ένα τέτοιο βακτήριο είναι η σαλμονέλα (*salmonella*), το οποίο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος  $35^\circ \text{C}$  διαιρείται κάθε ώρα και σχηματίζονται δυο άλλα βακτήρια.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια μερίδα τροφής υπάρχουν 100 βακτήρια σαλμονέλας και ότι η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι  $35^\circ \text{C}$ .

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός βακτηρίων	100					

β) Να αποτυπώσετε τα δεδομένα του πίνακα με σημεία σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Η σχέση μεταξύ του αριθμού των βακτηρίων και χρόνου είναι γραμμική; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εκτιμήσετε το χρόνο που θα υπάρχουν α) 1200 βακτήρια , β) 4.550 βακτήρια και γ) περισσότερα από 7.200 βακτήρια στη μερίδα τροφής.

δ) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το πλήθος των βακτηρίων σαλμονέλας ως συνάρτηση του χρόνου . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;

ε) Μπορούμε να υπολογίσουμε ανά πάσα χρονική στιγμή τον πληθυσμό των βακτηρίων; Θα είχαν νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι αρνητικές τιμές για α) για το χρόνο και β) για τον πληθυσμό των βακτηρίων;

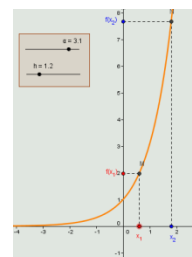
Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων ομάδων συναρτήσεων. Να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να συγκρίνουν τα γραφήματά τους και να προσδιορίσουν τυχόν ομοιότητες και διαφορές που αφορούν α) το πεδίο ορισμού, β) το σύνολο τιμών, γ) τα σημεία τομής με τους άξονες, δ) τη μονοτονία, ε) τις ασύμπτωτες και στ) τη συμμετρία.

- $f_1(x) = 2^x$ ,  $f_2(x) = 3 \cdot 2^x$ ,  $f_3(x) = -3 \cdot 2^x$ ,  $f_4(x) = 4 \cdot 2^x$ .
- $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ .
- $f_1(x) = 2^x$ ,  $f_2(x) = 2^x + 3$ ,  $f_3(x) = 2^{x-3}$ ,  $f_4(x) = 2^{x-3} + 3$
- $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Με το μικροπείραμα «Η μονοτονία μιας εκθετικής συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες διερευνούν την έννοια της μονοτονίας και τη μελέτη της μονοτονίας μιας εκθετικής συνάρτησης. Με τη βοήθεια του λογισμικού μεταβάλλουν τη βάση μιας εκθετικής συνάρτησης και παρατηρώντας τη γραφική της παράσταση βρίσκουν τη μονοτονία της με τη βοήθεια του ορισμού.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5238>

**§5.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες**

Η κατανόηση των λογαρίθμων και των ιδιοτήτων τους μπορεί να στηριχτεί στον ορισμό του λογαρίθμου και στις ήδη γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων. Επιπλέον, στο ιστορικό σημείωμα που υπάρχει στο τέλος του κεφαλαίου (αλλά και αλλού) μπορεί κανείς να βρει στοιχεία που δικαιολογούν την «επινόηση» των λογαρίθμων. Έμφαση πρέπει να δοθεί στα παραδείγματα 1 και 2 που περιγράφουν την κλίμακα Richter για τη μέτρηση των σεισμών και το pH για την οξύτητα ενός

διαλύματος. Τα παραδείγματα αυτά εισάγουν την αξιοποίηση των λογαρίθμων στην καθημερινή ζωή.

Αντίθετα, μια προσπάθεια απομνημόνευσης τύπων και τεχνασμάτων χωρίς νόημα δεν είναι μαθησιακά αποδοτική και δεν ενθαρρύνεται.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις της Α΄ Ομάδας με έμφαση στα προβλήματα και οι ασκήσεις 2, 3, 5 της Β΄ Ομάδας. Να μη γίνουν οι ασκήσεις 6, 7 και 8 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Για απλό ήχο δεδομένης έντασης  $I$ , η ένταση του υποκειμενικού αισθήματος που αντιλαμβάνεται κάποιος ακροατής ονομάζεται ακουστότητα  $L$  του ήχου. Για την ακουστότητα  $L$  χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης το 1 decibel και για την ένταση  $I$  το  $\text{watt/m}^2$ .

Έχει βρεθεί πειραματικά ότι η ακουστότητα  $L$  σχετίζεται με την ένταση  $I$  με λογαριθμικό τρόπο, σύμφωνα με τον τύπο  $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ , όπου  $I_0$  η μικρότερη ένταση ήχου που μπορεί να ακούσει το αυτί του ανθρώπου, και είναι περίπου ίση με  $10^{-12} \text{ watt/m}^2$ . Να υπολογίσετε την ακουστότητα απλού ήχου έντασης: α)  $10^{-6} \text{ watt/m}^2$  και β) δεκαπλάσιας από το  $I_0$ .

**§5.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες**

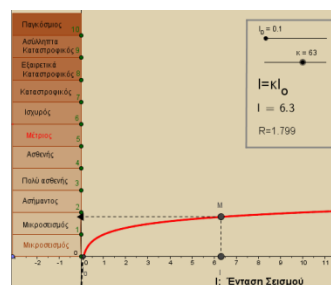
Για τον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης είναι σημαντική η σχέση της με την εκθετική, τόσο αλγεβρικά (με την ισοδυναμία  $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$ ), όσο και γεωμετρικά (με τη συμμετρία των δύο γραφικών παραστάσεων ως προς την  $y = x$ ). Επίσης, κατ' αντιστοιχία με την εκθετική συνάρτηση, έμφαση θα πρέπει να δοθεί σε προβλήματα και στις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Θα διδαχθούν μόνο οι συναρτήσεις  $f(x) = \log x$  και  $f(x) = \ln x$ . Ωστόσο, για λόγους κατανόησης της σχέσης με την αντίστοιχη εκθετική συνάρτηση, θα μπορούσαν να αναφερθούν και οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση  $a$ , με  $0 < a < 1$ , σε αυτή την περίπτωση όμως, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διδακτέα ύλη περιορίζεται στις  $f(x) = \log x$  και  $f(x) = \ln x$ .

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις: 2, 5, 6, 7 και 8 της Α΄ Ομάδας και 1(i, iii), 3, 5, 7 και 8 της Β΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί το μικροπείραμα «Λογαριθμική μεταβολή – Κλίμακα Richter» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση της λογαριθμικής μεταβολής. Με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές/-ήτριες από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του μεγέθους ενός σεισμού σε κλίμακα Richter ως προς την έντασή του, δημιουργούν εικασίες σχετικά με τη σχέση που



έχουν αυτά τα δύο μεγέθη και τις αποδεικνύουν αλγεβρικά. Στη συνέχεια, συγκρίνουν τις εντάσεις σεισμών που έχουν συμβεί στο παρελθόν και λύνουν τα προβλήματα γραφικά και αλγεβρικά.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5240>